

Διήμερο Εκπαιδευτικού 2018

Σχεδιασμός και οργάνωση διδασκαλίας στα Μαθηματικά – Αποτελεσματική διδασκαλία και μάθηση

Δρ. Μάριος Πιπτάλης



Πανεπιστήμιο Κύπρου
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής

Δομή Παρουσίασης

Μέρος Α΄

Αναλυτικό Πρόγραμμα και Σχεδιασμός Διδασκαλίας

- * Δείκτες Επιτυχίας και Δείκτες Επάρκειας
- * Συνοπτική παρουσίαση αναλυτικού ανά τάξη
- * Προγραμματισμός (τριμηνιαίος, εβδομαδιαίος)
- * Μοντέλο διδασκαλίας
- * Σχέδιο μαθήματος

Μέρος Β΄

Αποτελεσματική διδασκαλία και μάθηση στα Μαθηματικά

Δείκτες Επιτυχίας

- Οι δείκτες επιτυχίας εκφράζουν τα **αναμενόμενα αποτελέσματα** με συγκεκριμένο και σαφή τρόπο και με τρόπο που μπορούν να αξιολογηθούν.
- Περιλαμβάνουν γνώσεις, δεξιότητες και στάσεις.
- Περιγράφουν έννοιες που είναι σημαντικές.

ΟΙ ΔΕΙΚΤΕΣ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΣΤΟΧΟΙ

Δείκτες Επιτυχίας

Αναμενόμενα μαθησιακά
αποτελέσματα

(με συγκεκριμένο και σαφή τρόπο
για να μπορούν να αξιολογηθούν)

Συγκεκριμένοι,
σαφείς,
παρατηρήσιμοι,
μετρήσιμοι

Αξιολογητέα

Αναφέρονται
στον μαθητή και
τα επιτεύγματά
του

Δείκτες Επάρκειας

- Αναφέρονται στο τι πρέπει να διδαχθεί ο μαθητής, για να επιτύχει τα καθορισμένα Μαθησιακά Αποτελέσματα.
- Περιλαμβάνουν όσα πρέπει να διδάξουμε ή/και έπρεπε να γνωρίζει ο μαθητής, για να επιτύχει τον Δείκτη Επιτυχίας.
- Αναφέρονται σε ΣΚΑΛΟΠΑΤΙΑ μάθησης, ιεραρχίες ή προαπαιτούμενη γνώση, για να επιτευχθεί ο Δείκτης Επιτυχίας.

Δείκτες Επάρκειας

- Περιλαμβάνουν λειτουργική ανάλυση των συγκεκριμένων και διδακτέων -γλωσσικών ή συμβολικών δεξιοτήτων, αναπαραστάσεων κτλ.
- Απαντούν στο Γιατί της διδασκαλίας και οριοθετούν τα βήματα για τη βελτίωσή του μαθητή
- Είναι προσανατολισμένοι:
 - στη διδασκαλία/ μάθηση επιμέρους γνώσεων και δεξιοτήτων και όχι στο αποτέλεσμα=στόχο
 - στο **πώς** επιτυγχάνουμε τον τελικό στόχο Π.χ. τι θα πρέπει να μάθω τον μαθητή για να μπορεί να κατανοεί συγκεκριμένη μαθηματική έννοια

Δείκτες Επάρκειας

Αναφέρονται στο τι πρέπει να διδαχθεί/γνωρίζει ο μαθητής (διδασκτέα) για να επιτευχθούν τα αναμενόμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Σκαλοπάτια μάθησης
Προαπαιτούμενη γνώση
(για να επιτευχθεί ο δείκτης επιτυχίας)

Γνώσεις, δεξιότητες, ικανότητες, πληροφορίες, έννοιες, αξίες, στάσεις, στρατηγικές

Αναφέρονται
στον
εκπαιδευτικό

Συνοπτική Παρουσίαση Αναλυτικού Προγράμματος ανά τάξη

Α΄ Τάξη

Αριθμοί – Πράξεις & Άλγεβρα

- Απαγγελία, αναγνώριση, σύγκριση, διάταξη και αναπαράσταση αριθμών μέχρι το 100
- Πρόσθεση και αφαίρεση μέχρι το 20 με ευχέρεια (χωρίς υπερπήδηση και χάλασμα δεκάδας)
- Πρόσθεση και αφαίρεση μέχρι το 20 με στρατηγικές
- Έννοια πολλαπλασιασμού ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση
- Διαίρεση ως μερισμός και ως επαναλαμβανόμενη αφαίρεση
- Επίλυση προβλήματος αθροιστικής και πολλαπλασιαστικής δομής (ένα βήμα)
- Αναγνώριση, περιγραφή, συμπλήρωση και επέκταση μοτίβων
- Αντιμεταθετική ιδιότητα πρόσθεσης

Γεωμετρία - Μέτρηση

- Έννοιες του χώρου (π.χ μέσα, έξω, πάνω, κάτω)
- Αναγνώριση, ονομασία και περιγραφή βασικών χαρακτηριστικών δισδιάστατων σχημάτων
- Μέτρηση μήκους σε cm
- Έννοιες χρόνου: Εποχές, μήνες, αναγνώριση και γραφή ολόκληρης ώρας

Στατιστική - Πιθανότητες

- Ερμηνεία εικονογράμματος και ραβδογράμματος

Β' Τάξη

Αριθμοί – Πράξεις & Άλγεβρα

- Απαγγελία, αναγνώριση, σύγκριση, διάταξη και αναπαράσταση αριθμών μέχρι το 1000
- Πρόσθεση και αφαίρεση μέχρι το 20 με ευχέρεια
- Πρόσθεση και αφαίρεση μέχρι το 100 με στρατηγικές
- Κατακόρυφος αλγόριθμος πρόσθεσης
- Πολλαπλασιασμός ως ομαδοποίηση, εμβαδόν και σύγκριση
- Διαίρεση ως μερισμός και ως επαναλαμβανόμενη αφαίρεση
- Μοτίβα πολλαπλασιασμού (πίνακες 2, 3, 4, 5 και 6) και στρατηγικές υπολογισμού γινομένου
- Λεκτικά προβλήματα μίας και δύο πράξεων
- Αναγνώριση, περιγραφή, συμπλήρωση, επέκταση και κατασκευή μοτίβων με διαφορετικά μέσα αναπαράστασης
- Αντιμεταθετική ιδιότητα στην πρόσθεση και στον πολλαπλασιασμό

Γεωμετρία - Μέτρηση

- Αναγνώριση, ονομασία και κατασκευή σχημάτων με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά
- Ιδιότητες ορθογωνίου και τετραγώνου
- Αναγνώριση ορθής γωνίας
- Μέτρηση μήκους σε cm με κατάλληλα εργαλεία
- Περίμετρος ευθύγραμμων σχημάτων
- Έννοια εμβαδού
- Αναγνώριση κερμάτων, χαρτονομισμάτων
- Ημερομηνία
- Ώρα σε ψηφιακά και αναλογικά ρολόγια

Στατιστική - Πιθανότητες

- Οργάνωση και παρουσίαση δεδομένων σε πίνακα, εικονόγραμμα και ραβδόγραμμα
- Ερμηνεία πίνακα, εικονογράμματος και ραβδογράμματος

Γ' Τάξη

Αριθμοί – Πράξεις & Άλγεβρα

- Απαγγελία, αναγνώριση, σύγκριση, διάταξη, στρογγυλοποίηση και αναπαράσταση αριθμών μέχρι το 10000
- Νοεροί υπολογισμοί και κατακόρυφοι αλγόριθμοι πρόσθεσης και αφαίρεσης
- Έννοια ατελούς διαίρεσης
- Αυτοματοποίηση μοτίβων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης μέχρι το 100
- Λεκτικά προβλήματα μίας και δύο πράξεων
- Κλάσμα ως μέρος-όλου και ως μέρος συνόλου διακριτών στοιχείων
- Αναγνώριση, περιγραφή, επέκταση, συμπλήρωση και κατασκευή μοτίβων με βάση κάποιο κανόνα
- Ισότητα, ανισότητα
- Αντιμεταθετική ιδιότητα πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού και χρήση προσεταιριστικής και επιμεριστικής ιδιότητας για υπολογισμούς

Γεωμετρία - Μέτρηση

- Αναγνώριση και ονομασία γωνιών (ορθή, οξεία, αμβλεία)
- Ονομασία και ταξινόμηση πολυγώνων με βάση τον αριθμό πλευρών και γωνιών
- Αναγνώριση κοινών χαρακτηριστικών σχημάτων
- Αναγνώριση και ονομασία τρισδιάστατων σχημάτων
- Περιγραφή και καθορισμός θέσεων στο χώρο
- Αναγνώριση και κατασκευή απλών συμμετρικών σχημάτων
- Μονάδες μέτρησης μήκους (cm & m), μάζας (g & kg) και χωρητικότητας (ml & L)
- Περίμετρος και εμβαδόν ορθογωνίου και τετραγώνου
- Αναγνώριση ορθών, οξείων και αμβλειών γωνιών
- Σχέσεις μεταξύ χαρτονομισμάτων και νομισμάτων
- Σχέσεις μεταξύ μονάδων χρόνου και γραφή ώρας (π.μ. & μ.μ.)

Στατιστική - Πιθανότητες

- Συμπλήρωση βασικών στοιχείων γραφικών παραστάσεων
- Ερμηνεία γραφικής παράστασης με χρήση υπομνήματος
- Βέβαιο, αδύνατον και πιθανόν να συμβεί γεγονός

Δ' Τάξη

Αριθμοί – Πράξεις & Άλγεβρα

- Αριθμοί μέχρι το ένα εκατομμύριο
- Νοεροί υπολογισμοί ακεραίων μέχρι το 10000 και εκτίμηση αθροίσματος, διαφοράς, γινομένου και πηλίκου
- Κατακόρυφοι αλγόριθμοι πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού (ο ένας παράγοντας μονοψήφιος) και διαίρεσης (μονοψήφιος διαιρέτης)
- Επίλυση προβλήματος αθροιστικής και πολλαπλασιαστικής δομής (ενός και δύο βημάτων), προβλήματα διαδικασίας
- Κλάσμα ως μέρος της ακεραίας μονάδας, ως μέρος συνόλου διακριτών στοιχείων, υπολογισμός κλασματικού μέρους αριθμού

Αριθμοί – Πράξεις & Άλγεβρα

- Ισοδυναμία και σύγκριση κλασμάτων
- Πρόσθεση/αφαίρεση ομώνυμων κλασμάτων και δεκαδικών
- Έννοια μικτού αριθμού και έννοια δεκαδικού αριθμού (δέκατο, εκατοστό)
- Αναγνώριση, συμπλήρωση και επέκταση μοτίβου με έμφαση στην περιγραφή του κανόνα
- Κατασκευή αριθμητικών ή σχηματικών μοτίβων με βάση κάποιον κανόνα και εξαγωγή συμπεράσματος
- Χρήση αντιμεταθετικής και προσεταιριστικής ιδιότητας της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και επιμεριστικής ιδιότητας για τον υπολογισμό γινομένων

Στατιστική - Πιθανότητες

- Ερμηνεία και κατασκευή ραβδογράμματος και εικονογράμματος με τη χρήση υπομνήματος
- Ερμηνεία κυκλικής γραφικής παράστασης
- Σειροθέτηση γεγονότων με βάση την πιθανότητα να συμβούν

Γεωμετρία - Μέτρηση

- Αναγνώριση και κατασκευή γωνίας
- Παράλληλες και κάθετες ευθείες
- Αναγνώριση, ονομασία και περιγραφή πολυγώνων
- Ταξινόμηση σχημάτων (παράλληλία, καθετότητα, κτλ.)
- Αναγνώριση και ονομασία βασικών τρισδιάστατων σχημάτων
- Ακμές, κορυφές και έδρες
- Συσχέτιση τρισδιάστατων σχημάτων με αναπτύγματά
- Άξονας συμμετρίας, συμπλήρωση και κατασκευή συμμετρικού σχήματος
- Θέσεις στο χώρο και οδηγίες κατεύθυνσης
- Χρήση κατάλληλων μονάδων μέτρησης μήκους, μάζας, χωρητικότητας και όγκου
- Υπολογισμός όγκου ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου
- Υπολογισμός περιμέτρου και εμβαδού ορθογωνίου και τετραγώνου με τη χρήση τύπων
- Γραφή χρηματικών ποσών σε δεκαδική μορφή
- Έννοιες χρόνου (Έτος, δεκαετία, αιώνας) και γραφή ώρας σε διαφορετικές μορφές

Ε΄ Τάξη

Αριθμοί – Πράξεις & Άλγεβρα

- Εννιαψήφιοι αριθμοί
- Γραπτοί και νοερόι υπολογισμοί με αξιοποίηση των ιδιοτήτων των πράξεων
- Κατακόρυφοι αλγόριθμοί πολλαπλασιασμού και διαίρεσης (διψήφια)
- Επίλυση προβλήματος αθροιστικής και πολλαπλασιαστικής δομής, μοντελοποίησης και προβλήματα διαδικασίας
- Στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων αναλογίας
- Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων
- Έννοια αρνητικού αριθμού
- Κλάσμα ως μέτρο, πηλίκο και ως τελεστής
- Απλοποίηση και ισοδυναμία κλασμάτων
- Έννοια μικτού αριθμού και καταχρηστικού κλάσματος (μετατροπές)
- Έννοια ποσοστού
- Μετατροπή κλάσματος σε δεκαδικό, ποσοστό και αντίστροφα

Αριθμοί – Πράξεις & Άλγεβρα

- Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων, δεκαδικών και μικτών
- Πολλαπλασιασμός κλάσματος/δεκαδικού με ακέραιο και διαίρεση κλασμάτων/δεκαδικών (διαιρέτης ακέραιος)
- Έννοια Μ.Κ.Δ. και Ε.Κ.Π.
- Κριτήρια Διαιρετότητας (2, 5, 4 και 10)
- Επίλυση προβλήματος με κλάσματα, δεκαδικούς και ποσοστά
- Διερεύνηση της σχέσης της θέσης ενός όρου και του κανόνα υπολογισμού του όρου σε ένα μοτίβο
- Έννοια μεταβλητής
- Εξισώσεις με μεταβλητές για αναπαράσταση προβλήματος
- Απλοποίηση μαθηματικών εκφράσεων και επίλυση απλών εξισώσεων
- Αναγνώριση και χρήση ιδιοτήτων των πράξεων σε αριθμητικές και συμβολικές εκφράσεις

Στατιστική - Πιθανότητες

- Γραμμική γραφική παράσταση
- Υπολογισμός πιθανότητας ενδεχομένου
- Έννοια δειγματικού χώρου

Γεωμετρία - Μέτρηση

- Σημείο, ευθεία, ημιευθεία, ευθύγραμμο τμήμα
- Κατασκευή παράλληλων και κάθετων ευθειών, ύψους τριγώνου και παραλληλογράμμου
- Ταξινόμηση σχημάτων με βάση τις ιδιότητες τους
- Είδη τριγώνων
- Βασικά χαρακτηριστικά πυραμίδων και πρισμάτων
- Συσχέτιση τρισδιάστατων σχημάτων με αναπτύγματα
- Ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, συντεταγμένες
- Ιδιότητες συμμετρικών σχημάτων

Γεωμετρία - Μέτρηση

- Μετατροπές μονάδων μέτρησης, μήκους, μάζας και χωρητικότητας
- Μονάδες μέτρησης όγκου
- Εμβαδόν τριγώνου και παραλληλογράμμου
- Περίμετρος και εμβαδόν ακανόνιστων ευθύγραμμων σχημάτων
- Μέτρηση γωνιών
- Υπολογισμός όγκου ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου με τύπους
- Σχέσεις μεταξύ χρηματικών ποσών
- Σχέσεις μεταξύ μονάδων μέτρησης χρόνου (δευτερόλεπτο)
- Μέτρηση γωνιών με κατάλληλα μέσα

Στ' Τάξη

Αριθμοί – Πράξεις & Άλγεβρα

- Αριθμοί μέχρι το δισεκατομμύριο
- Γραπτοί και νοεροί υπολογισμοί με θετικούς ρητούς
- Ευκλείδεια διαίρεση
- Κριτήρια Διαιρετότητας (3 και 9)
- ΜΚΔ, ΕΚΠ
- Λόγος και αναλογία
- Επίλυση προβλημάτων με ευθέως ανάλογα ποσά
- Αρνητικοί αριθμοί, πρόσθεση και αφαίρεση ακεραίων με μοντέλα
- Ποσοστό ως λόγος, πηλίκο και δεκαδικός
- Μετατροπή κλάσματος σε δεκαδικό, ποσοστό και αντίστροφα
- Πολλαπλασιασμός και διαίρεση κλασμάτων, δεκαδικών και μικτών

Αριθμοί – Πράξεις & Άλγεβρα

- Έκφραση του νιοστού όρου σε μοτίβα
- Επέκταση και κατασκευή μοτίβων με ακέραιους, δεκαδικούς και κλάσματα
- Έννοια μεταβλητής
- Απλοποίηση μαθηματικών εκφράσεων, επίλυση εξισώσεων και μετάφραση αλγεβρικών εκφράσεων
- Προτεραιότητα πράξεων
- Επίλυση προβλήματος με ρητούς και ποσοστά πολλαπλών βημάτων, διαδικασίας και μοντελοποίησης

Στατιστική - Πιθανότητες

- Καταγραφή αποτελεσμάτων ερευνητικών δραστηριοτήτων
- Έννοια μέσου όρου
- Αξιολόγηση τρόπου παρουσίασης δεδομένων
- Πειράματα τύχης με πολλαπλές επαναλήψεις
- Υπολογισμός πιθανότητας ενδεχομένου
- Καταγραφή και εύρεση του πλήθους των ενδεχομένων

Γεωμετρία - Μέτρηση

- Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου
- Απλές γεωμετρικές κατασκευές (μέσο, ύψος, διάμεσος)
- Συμπληρωματικές και παραπληρωματικές γωνίες
- Σχέσεις εγκλεισμού και ταξινόμηση σχημάτων με βάση τις ιδιότητες τους
- Κανονικά πολύγωνα
- Στοιχεία και ιδιότητες κύκλου
- Δισδιάστατες αναπαραστάσεις τρισδιάστατων σχημάτων
- Κατασκευή σχημάτων σε σύστημα αξόνων
- Εκτέλεση μετασχηματισμών (ανάκλαση, περιστροφή, μεταφορά)
- Μήκος περιφέρειας κύκλου
- Σχέση μεταξύ περιφέρειας κύκλου και διαμέτρου
- Περίμετρος σύνθετων σχημάτων και εμβαδόν ευθύγραμμων σχημάτων
- Όγκος ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου με τύπους
- Άθροισμα γωνιών τριγώνου και πολυγώνων

Μαθηματικές Πρακτικές

1. Κατανόηση μέσω προβλήματος και επιμονή στη λύση προβλήματος
2. Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη
3. Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων
4. Μοντελοποίηση
5. Στρατηγική χρήση εργαλείων
6. Ακρίβεια
7. Δομή των Μαθηματικών
8. Κανονικότητα σε επαναλαμβανόμενο συλλογισμό

Προγραμματισμός

Τριμηνιαίος/εξαμηνιαίος προγραμματισμός (για προσωπική χρήση)

- * Στηρίζεται στην ενδεικτική οργάνωση της ύλης κάθε τάξης και στους δείκτες επιτυχίας του Αναλυτικού Προγράμματος

Εβδομαδιαίος/Δεκαπενθήμερος Προγραμματισμός

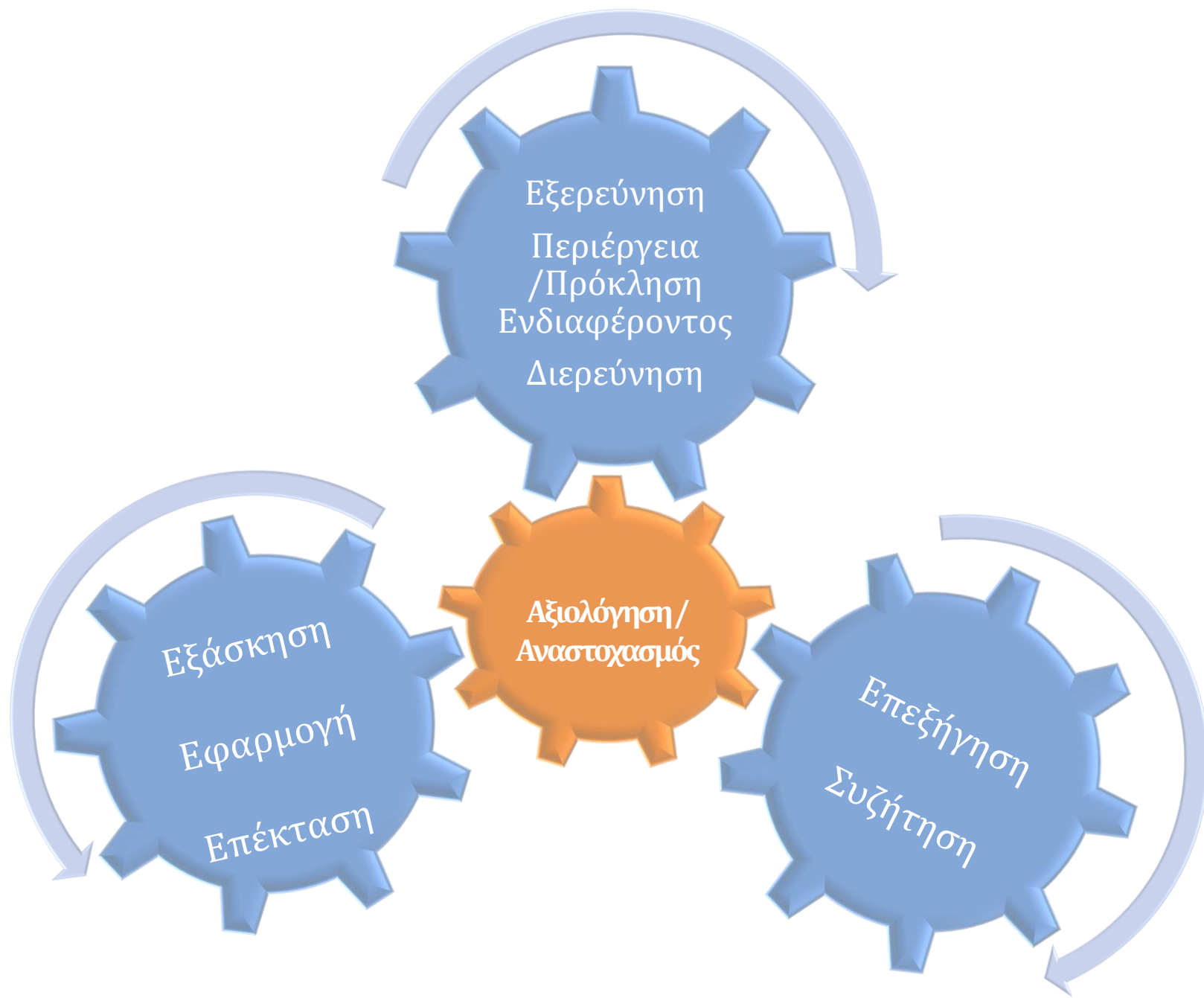
- * Στηρίζεται στους δείκτες επιτυχίας και κυρίως στους δείκτες επάρκειας του Αναλυτικού Προγράμματος γιατί αναφέρεται κυρίως στο τι θα διδαχθεί στους μαθητές και στον Οδηγό Εκπαιδευτικού

Παράδειγμα: Ενότητα 2 – Γ' τάξη

Θέμα	Δείκτες Επιτυχίας	Δείκτες Επάρκειας
Εβδομάδα 1		
Μαθήματα 1-5 Σελ. 50-59		
Πρόσθεση και αφαίρεση μέχρι το 100 (νοερές στρατηγικές), χωρίς υπερπήδηση ή χάλασμα δεκάδας	Αρ2.11: Αναπαριστούν καταστάσεις πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού, τέλειας και ατελούς διαίρεσης, χρησιμοποιώντας υλικό όπως κύβους Dienes, εικόνες, εφαρμογίδια και σύμβολα Αρ2.15: Χρησιμοποιούν και διατυπώνουν στρατηγικές εκτέλεσης νοερών υπολογισμών με αριθμούς μέχρι το 1000. Αρ2.17: Διατυπώνουν και επιλύουν προβλήματα διαδικασίας και λεκτικά προβλήματα με περισσότερες από μία πράξεις και ελέγχουν τη λογικότητα της απάντησής τους.	Οι μαθητές εμπλέκονται σε δραστηριότητες: Αριθμοί – Πράξεις (χωρίς υπερπήδηση) 6.1 Αναπαράστασης καταστάσεων πρόσθεσης και αφαίρεσης 10.1 Πρόσθεσης και αφαίρεση με νοερές στρατηγικές που βασίζονται: Στην ανάλυση αριθμών, στην εξισορρόπηση, στην αφαίρεση ως συμπληρωματική πρόσθεση, στην αξιοποίηση γνωστών αθροισμάτων 15.1 Επίλυσης λεκτικών προβλημάτων μίας και δύο πράξεων αθροιστικής δομής Άλγεβρας 4.1 Κατανόησης της έννοια της ισότητας, για τη συμπλήρωση ισοτήτων

Παράδειγμα: Ενότητα 2 – Γ' τάξη

Θέμα	Δείκτες Επιτυχίας	Δείκτες Επάρκειας
Εβδομάδα 2		
Μαθήματα 6-12 Σελ. 60-72		
Πρόσθεση μέχρι το 100 (νοερές στρατηγικές) με υπερπήδηση δεκάδας και κατακόρυφος αλγόριθμος και αφαίρεση μονοψήφιου από διψήφιο (νοεροί υπολογισμοί)	Αρ2.11: Αναπαριστούν καταστάσεις πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού, τέλειας και ατελούς διαίρεσης, χρησιμοποιώντας υλικό όπως κύβους Dienes, εικόνες, εφαρμογίδια και σύμβολα Αρ2.15: Χρησιμοποιούν και διατυπώνουν στρατηγικές εκτέλεσης νοερών υπολογισμών με αριθμούς μέχρι το 1000. Αρ2.13: Αναπτύσσουν και εφαρμόζουν αλγόριθμους της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού με τριψήφιους αριθμούς	Οι μαθητές εμπλέκονται σε δραστηριότητες: Αριθμοί – Πράξεις (με υπερπήδηση) 6.1 Αναπαράστασης καταστάσεων πρόσθεσης και αφαίρεσης 10.1 Πρόσθεσης και αφαίρεσης με νοερές στρατηγικές που βασίζονται: Στην ανάλυση αριθμών, στην εξισορρόπηση, στην αφαίρεση ως συμπληρωματική πρόσθεση, στην αξιοποίηση γνωστών αθροισμάτων 8.1 Εφαρμογής του κατακόρυφου αλγόριθμου της πρόσθεσης Άλγεβρας 6.1 Επίλυσης προβλημάτων χρησιμοποιώντας ποικιλία στρατηγικών





Ημερήσιος Προγραμματισμός

Αναλυτικό πρόγραμμα και διδασκαλία

Δείκτες Επιτυχίας

Αποτελούν τη βάση για τον καθορισμό των διδακτικών στόχων της διδασκαλίας

Δείκτες Επάρκειας

Αποτελούν τη βάση για την επιλογή και ανάπτυξη των δραστηριοτήτων του μαθήματος



Παράδειγμα εφαρμογής
μοντέλου διδασκαλίας, χρησιμοποιώντας
το διδακτικό υλικό της Δ' τάξης

Ισοδυναμία κλασμάτων

Παράδειγμα: Δ' τάξη, Ενότητα 8, Ισοδυναμία Κλασμάτων

ΕΝΟΤΗΤΑ 8 ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Στον πιο κάτω πίνακα παρουσιάζονται οι δείκτες επιτυχίας και επάρκειας που αντιστοιχούν στην Ενότητα 8.

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ	ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΑΡΚΕΙΑΣ	ΠΡΟΥΠΑΡΧΟΥΣΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ	ΝΕΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ
Ισοδυναμία κλασμάτων			
21.(Αρ3.7) Χρησιμοποιούν ποικίλα μέσα αναπαράστασης και στρατηγικές, για να απλοποιούν κλάσματα και να βρίσκουν ισοδύναμες μορφές τους.	21.1 Κατανοούν την έννοια της ισοδυναμίας κλασμάτων και κατασκευάζουν ισοδύναμα κλάσματα με τη βοήθεια εποπτικών μέσων, εικόνων και εφαρμογιδίων.	✓ Έννοια του κλάσματος	✓ Ισοδυναμία κλασμάτων

- Περιέργεια
- Προβληματισμός

Η μητέρα της Λίζας και του Στέφανου αγόρασε στον καθένα από ένα ίδιο μπουκάλι χυμού. Στη συνέχεια, η μητέρα τους μέτρησε την ποσότητα χυμού που κατανάλωσε ο Στέφανος και η Λίζα. Να διαβάσεις το διάλογο των παιδιών και να εξηγήσεις αν συμφωνείς ή αν διαφωνείς με τη Λίζα.

Λίζα, η μαμά λέει ότι έχω πει τα $\frac{2}{6}$ του χυμού από το μπουκάλι μου.



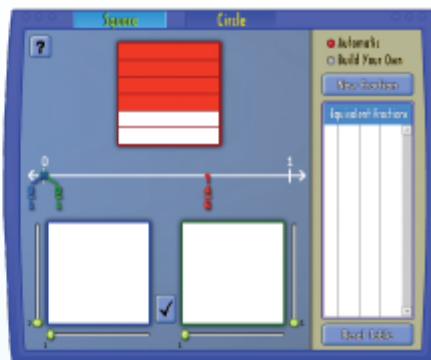
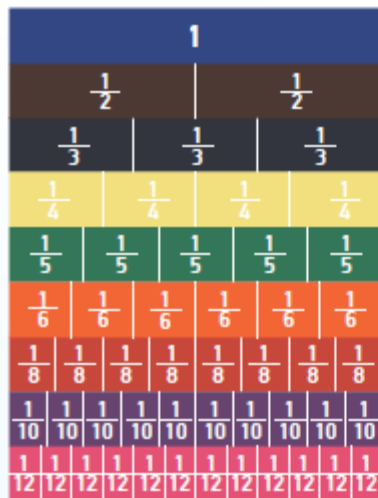
Εμένα μου είπε ότι έχω πιεί το $\frac{1}{3}$ του χυμού από το δικό μου μπουκάλι. Άρα πιστεύω ότι εσύ έχεις πει περισσότερη ποσότητα χυμού από εμένα.



Μαθηματική Πρακτική:
Διατύπωση ισχυρισμών



ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ



<http://illuminations.nctm.org/Activity.aspx?id=3510>

Να χρησιμοποιήσεις ράβδους κλασμάτων ή το εφαρμογίδιο, για να γράψεις ισοδύναμα κλάσματα με:

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{5}$$

Να εξηγήσεις τον τρόπο με τον οποίο εργάστηκες.

2

- Περιέργεια
- Διερεύνηση
- Επεξήγηση

<https://illuminations.nctm.org/activity.aspx?id=3510>

Μαθηματική Πρακτική:
Στρατηγική χρήση
εργαλείων

Να βρείτε ποια ζεύγη τιμών μπορεί να πάρει
το α και β στην ισότητα $\frac{1}{6} = \frac{\alpha}{\beta}$.

Παράδειγμα: Στ' τάξη, Ενότητα 2, Προτεραιότητα Πράξεων

Δείκτες Επιτυχίας

(Αλ3.12) Χρησιμοποιούν την προτεραιότητα των πράξεων, για να απλοποιούν νοερούς και γραπτούς υπολογισμούς και να ελέγχουν τα αποτελέσματά τους.

Χρησιμοποιούν την προτεραιότητα πράξεων, για να απλοποιούν νοερούς και γραπτούς υπολογισμούς.

Νέες Έννοιες:

- ✓ Προτεραιότητα πράξεων

Παράδειγμα χρήσης της προτεραιότητας πράξεων:

- Να περιγράψεις τη σειρά με την οποία έγιναν οι πιο κάτω πράξεις, ώστε να ισχύουν οι ισότητες.

(α) $3 \times 6 - 5 = 13$

(β) $20 - 6 \times 2 = 8$

(γ) $40 \div 20 + 5 = 7$

(δ) $15 - 4 \times 3 + 6 = 9$

ΜΠ3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων

Επεξηγώ τη σκέψη μου και λαμβάνω υπόψη μου τη γνώμη των άλλων.

Παράδειγμα: Η Στέλλα και ο Ιωάννης χρησιμοποίησαν τους ίδιους αριθμούς και τα ίδια σύμβολα σε μια πράξη αλλά το αποτέλεσμα που βρήκαν ήταν διαφορετικό.

Στέλλα:

$$4 + 6 \times 5 - 2 = 32$$

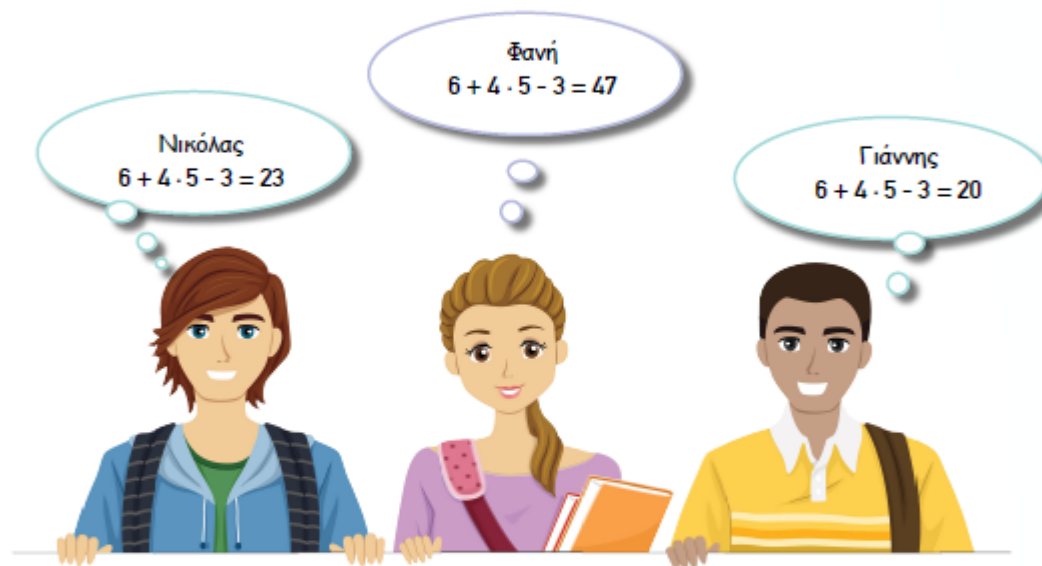
Ιωάννης:

$$4 + 6 \times 5 - 2 = 48$$

Ποιο παιδί βρήκε την ορθή απάντηση; Να επεξηγήσεις.

Δείκτης Επάρκειας

Η Φανή, ο Νικόλας και ο Γιάννης υπολόγισαν το αποτέλεσμα της μαθηματικής πρότασης $6 + 4 \cdot 5 - 3 = \nu$.



Περίεργια, Πρόκληση

(α) Να σχολιάσετε και να συγκρίνετε τις απαντήσεις των παιδιών.

(β) Γιατί τα παιδιά οδηγήθηκαν σε διαφορετικό αποτέλεσμα;

(γ) Ποια ανάγκη προκύπτει με βάση τις παρατηρήσεις σας;

Μαθηματική Πρακτική:
Διατύπωση Ισχυρισμών

Νέες Έννοιες

- Η πράξη του πολλαπλασιασμού συμβολίζεται με " • ".

Παραδείγματα

$$4 \cdot 2 = 8 \quad 4 \cdot 6 = 24$$

- Στην προτεραιότητα πράξεων:

1. Αν υπάρχουν παρενθέσεις, πρώτα κάνουμε τις πράξεις στις παρενθέσεις.

Παραδείγματα

$$(3 \cdot 4) + 2 = 12 + 2 = 14$$

$$12 \div (3 + 1) = 12 \div 4 = 3$$

2. Στη συνέχεια, κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις με τη σειρά που εμφανίζονται από τα αριστερά προς τα δεξιά.

Παραδείγματα

$$2 \cdot 15 \div 3 = 30 \div 3 = 10$$

$$4 + 16 \div 2 \cdot 3 = 4 + 8 \cdot 3 = 4 + 24 = 28$$

3. Τέλος, κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις με τη σειρά που εμφανίζονται από τα αριστερά προς τα δεξιά.

Παραδείγματα

$$13 - 8 + 4 - 3 = 5 + 4 - 3 = 9 - 3 = 6$$

$$12 \cdot 6 - 22 + 8 = 72 - 22 + 8 = 50 + 8 = 58$$

Επεξήγηση, Συζήτηση,
Εξαγωγή
Συμπερασμάτων

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε την τιμή των πιο κάτω αριθμητικών παραστάσεων στο τετράδιό σας.

(α) $39 - 15 + 12$

(β) $16 \div 4 \cdot 6$

(γ) $18 + 4 \cdot 2$

(δ) $7 \cdot (2 + 6)$

(ε) $50 - 7 \cdot 6$

(στ) $18 \div (2 + 7)$

(ζ) $63 \div (10 - 3) \cdot 3$

(η) $(8 + 2) \cdot 6 - 5$

(θ) $48 \div 4 - 2 \cdot 3$

2. Να συμπληρώσετε.

(α) $9 \cdot 2 + \square = 25$

(β) $16 \div \square - 5 = 3$

(γ) $40 = \square + 7 \cdot 4$

(δ) $4 \cdot 8 = 5 \cdot 6 + \square$

(ε) $(4 + 5) \cdot 3 = \square \div 2$

(στ) $(20 - \square) \div 2 = 3 + 4$

(ζ) $15 - \square + \square = 14$

(η) $4 + \square \cdot \square = 10$

(θ) $4 \cdot \square + \square = 10$

(ι) $\square \cdot \square \div 4 = 20$

Εξάσκηση

Επέκταση, Αξιολόγηση

5. Να χρησιμοποιήσετε τους αριθμούς 2, 3 και 4 μία φορά τον καθένα και τα σύμβολα $+$, $-$, $\cdot$, $\div$, $()$ όσες φορές θέλετε το καθένα, για να κατασκευάσετε αριθμητικές παραστάσεις που να έχουν αποτέλεσμα:

(α) 9

(β) 10

Μαθηματική Πρακτική:
Ακρίβεια

Σχέδιο Μαθήματος

Οργάνωση Ημερήσιου Μαθήματος

Ημερομηνία διδασκαλίας:

Τάξη/Ηλικία παιδιών:, Αρ. παιδιών:

Τίτλος μαθήματος: Στο πεδίο αυτό συμπληρώνουμε τον τίτλο του συγκεκριμένου μαθήματος, την ενότητα από την οποία προέρχεται και στις σελίδες του σχολικού βιβλίου.

Δείκτες Επιτυχίας: Στο πεδίο αυτό συμπληρώνουμε τους δείκτες επιτυχίας από το Αναλυτικό πρόγραμμα-Περίγραμμα Περιεχομένου (Δείκτες Επιτυχίας και Επάρκειας 2016) που αντιστοιχούν στο συγκεκριμένο μάθημα.

Δείκτες Επάρκειας: Στο πεδίο και συγκεκριμένα στον πιο κάτω πίνακα, συμπληρώνουμε τους δείκτες επάρκειας από το Περίγραμμα Περιεχομένου (Δείκτες Επιτυχίας και Επάρκειας 2016) που αντιστοιχούν στο συγκεκριμένο μάθημα.

Προαπαιτούμενες γνώσεις	Νέες έννοιες

Στόχοι μαθήματος:

Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές/τριες να είναι σε θέση να:

Στο πεδίο αυτό διατυπώνουμε τους στόχους/μαθησιακά αποτελέσματα που αναμένεται να επιτευχθούν και παρατηρηθούν μέχρι το τέλος της συγκεκριμένης διδασκαλίας.

Μεθοδολογία και οργάνωση τάξης: Στο πεδίο αυτό καταχωρούμε πληροφορίες για τους κυριότερους τρόπους οργάνωσης των παιδιών κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας και της οργάνωσης χώρου, επίπλων, οργάνων ή μέσων, καθώς επίσης και του τρόπου διάθεσης και συλλογής τους, όπου ισχύει.

Μέσα και υλικά: Στο πεδίο αυτό καταγράφουμε όλα τα μέσα, όργανα και υλικά που θα χρειαστούμε κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας με τρόπο που να δείχνει εύκολα πόσα από το καθένα θα χρειαστούμε και αν προορίζεται για ατομική, ομαδική ή εργασία στην ολομέλεια.

Πορεία

A/A Χρόνος	Περιγραφή	Μαθηματικές Πρακτικές
A (ενδεικτικός χρόνος)	Πρόκληση Ενδιαφέροντος : Δραστηριότητα X (σελ. X):	
B (ενδεικτικός χρόνος)		
Γ (ενδεικτικός χρόνος)		
Δ (ενδεικτικός χρόνος)		
E (ενδεικτικός χρόνος)		
ΣΤ (ενδεικτικός χρόνος)		
Z (ενδεικτικός χρόνος)	Ολοκλήρωση μαθήματος: Δραστηριότητα X (σελ. X):	
ΣΤ	Εργασία στο σπίτι: X σελ. XX	

Αποτελεσματική Διδασκαλία και Μάθηση στα Μαθηματικά

Αποτελεσματική Διδασκαλία και Μάθηση στα Μαθηματικά

- Καθορισμός σαφών διδακτικών στόχων
- Επιλογή και εφαρμογή δραστηριοτήτων που προάγουν την επίλυση προβλήματος και το συλλογισμό
- Χρήση και διασύνδεση μαθηματικών αναπαραστάσεων
- Παραγωγικές συζητήσεις
- Υποβολή στοχευμένων ερωτήσεων
- Ανάπτυξη διαδικαστικής επάρκειας μέσω της εννοιολογικής κατανόησης
- Ενίσχυση και στήριξη μαθητών κατά τη μαθησιακή διαδικασία
- Συνεχής διαμορφωτική αξιολόγηση

Καθορισμός σαφών διδακτικών στόχων

Καθορισμός σαφών διδακτικών στόχων και σχεδιασμός μαθήματος με βάση τους διδακτικούς στόχους

Καθορισμός σαφών διδακτικών στόχων με βάση τα
αναμενόμενα αποτελέσματα του Αναλυτικού
Προγράμματος των Μαθηματικών:

- Τι μαθηματικά θα μάθουν οι μαθητές;
- Πώς σχετίζονται με την προϋπάρχουσα γνώση;
- Πού στοχεύουν να οδηγήσουν;
- Πώς οι στόχοι του μαθήματος συνδέονται με τα αναμενόμενα αποτελέσματα;

ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ

- ✓ Ιχνηλάτηση των αναμενόμενων αποτελεσμάτων ως μέρος του Α.Π., ποιος ο ρόλος τους στην ενότητα, στη συγκεκριμένη τάξη
- ✓ Με ποιο τρόπο οι διδακτικοί στόχοι εντάσσονται στην ανάπτυξη της συγκεκριμένης μαθηματικής έννοιας;
- ✓ Συζήτηση με τους μαθητές για τις συνδέσεις αυτών που διδάσκονται με άλλες μαθηματικές έννοιες
- ✓ Αναφορά στους στόχους κατά το σχεδιασμό του μαθήματος ή κατά τη λήψη αποφάσεων στη διάρκεια του μαθήματος

Ερωτήματα για τον καθορισμό διδακτικών στόχων

- Ποιες έννοιες εμπλέκονται και ποια αναμενόμενα αποτελέσματα;
- Με ποιες προϋπάρχουσες γνώσεις συνδέονται;
- Τι νέες έννοιες θα μάθουν οι μαθητές;
- Τι είδους εφαρμογές θα πρέπει να επιλύουν οι μαθητές;
- Σε ποιο «σκαλοπάτι μάθησης» πρέπει να φτάσουν οι μαθητές και για ποιο σκαλοπάτι προετοιμάζονται;



ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

Η Μαρία αγόρασε από τη φρουταρία 29 μήλα. Μελετά μια μαγειρική με νόστιμες συνταγές, για να αποφασίσει με ποιο τρόπο να τα χρησιμοποιήσει.



Γ' Δημοτικού

- (α) Η συνταγή για μια μηλόπιτα χρειάζεται 3 μήλα.
- Πόσες τέτοιες μηλόπιτες μπορεί να ετοιμάσει η Μαρία; _____
 - Πόσα μήλα θα περισσέψουν; _____
- (β) Η συνταγή για μια δόση μαρμελάδας μήλου χρειάζεται 6 μήλα.
- Πόσες δόσεις μαρμελάδας μήλου μπορεί να ετοιμάσει η Μαρία; _____
 - Πόσα μήλα θα περισσέψουν; _____
- (γ) Η συνταγή για μια τάρτα μήλου χρειάζεται 8 μήλα.
- Πόσες τέτοιες τάρτες μπορεί να ετοιμάσει η Μαρία; _____
 - Πόσα μήλα θα περισσέψουν; _____
- (δ) Ποια συνταγή ή συνταγές θα συμβούλευες τη Μαρία να ετοιμάσει; Να επεξηγήσεις.

Συζήτηση

- Ένας εκπαιδευτικός αποφάσισε να χρησιμοποιήσει ως επιπρόσθετο υλικό τα πιο κάτω προβλήματα για όλη την τάξη.

Σήμερα είναι Δευτέρα. Τι μέρα θα είναι σε 100 μέρες; Τι μέρα ήταν πριν 100 μέρες;

Να γράψετε 5 μαθηματικές προτάσεις διαίρεσης που να δίνουν διαφορετικό πηλίκο και ίδιο υπόλοιπο.

Επιλογή και εφαρμογή
δραστηριοτήτων που προάγουν
την επίλυση προβλήματος και το
συλλογισμό

Επιλογή και εφαρμογή δραστηριοτήτων που προάγουν την επίλυση προβλήματος και το συλλογισμό

Ερευνητικά αποτελέσματα έχουν δείξει ότι:

- Δεν προσφέρουν όλες οι δραστηριότητες τις ίδιες ευκαιρίες για ανάπτυξη της σκέψης των μαθητών
- Τα μαθησιακά αποτελέσματα μεγιστοποιούνται με δραστηριότητες μεγαλύτερης γνωστικής δυσκολίας

2. Να γράψετε δικά σας προβλήματα για τις πιο κάτω μαθηματικές προτάσεις και να τα επιλύσετε.

(α) $\frac{1}{4} \cdot 20 = v$

2. Να υπολογίσετε τα γινόμενα στο τετράδιό σας. Να γράψετε την απάντηση στην πιο απλή μορφή.

(α) $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$

(β) $\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{8}$

(γ) $7 \cdot \frac{1}{7}$

(δ) $\frac{4}{15} \cdot \frac{3}{7}$

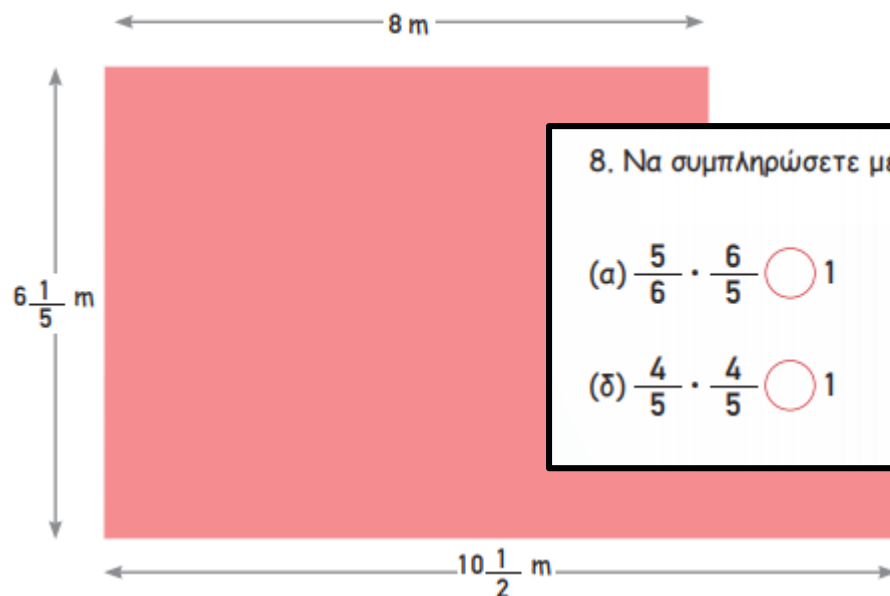
(ε) $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$

(στ) $\frac{7}{10} \cdot 5$

(ζ) $\frac{6}{15} \cdot \frac{1}{12}$

(η) $\frac{4}{6} \cdot \frac{5}{6}$

(β) Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του πιο κάτω οικοπέδου.



8. Να συμπληρώσετε με το σύμβολο $<$, $>$ ή $=$, χωρίς να κάνετε τις πράξεις.

(α) $\frac{5}{6} \cdot \frac{6}{5} \bigcirc 1$

(β) $2 \cdot \frac{3}{4} \bigcirc 1$

(γ) $4 \cdot \frac{1}{8} \bigcirc 1$

(δ) $\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \bigcirc 1$

(ε) $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \bigcirc \frac{1}{2}$

(στ) $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \bigcirc \frac{1}{2}$

Απομνημόνευση

- Αναπαραγωγή γνώσεων, κανόνων, τύπων, διαδικασιών, τύπων
- Δεν απαιτούν διασύνδεση με τις έννοιες από τις οποίες προκύπτουν τα πιο πάνω

Διαδικασίες χωρίς συνδέσεις

- Εφαρμογή αλγοριθμικών διαδικασιών είτε γιατί έχει μόλις διδαχθεί ή γιατί προκύπτει άμεσα από τα ζητούμενα
- Απαιτούν χαμηλού επιπέδου γνωστικές λειτουργίες, επικεντρώνονται στον υπολογισμό της ορθής απάντησης και δεν απαιτούν επεξήγηση ή εννοιολογική κατανόηση

Δραστηριότητες χαμηλής γνωστικής δυσκολίας

Διαδικασίες με συνδέσεις

- Εφαρμογή διαδικασιών με σκοπό την ανάπτυξη κατανόησης και επεξεργασίας της έννοιας
- Χρήση πολλών αναπαραστάσεων και συνδέσεις μεταξύ τους
- Χρειάζονται κάποιο βαθμό γνωστικής προσπάθειας (διασύνδεση διαδικασιών με εννοιολογική κατανόηση)

Κάνω μαθηματικά

- Απαιτούν πολύπλοκες και μη-αλγοριθμικές διαδικασίες
- Εμπλέκουν εξερεύνηση και διερεύνηση μαθηματικών εννοιών
- Απαιτούν ανάλυση του έργου, ώστε να προκύψουν πιθανοί περιορισμοί στην επίλυσή του
- Απαιτούν επίμονη γνωστική προσπάθεια, λόγω του μη προκαθορισμένου τρόπου επίλυσης

Δραστηριότητες μεγάλης γνωστικής δυσκολίας

Απομνημόνευση

Ποιος είναι ο κανόνας για τον
πολλαπλασιασμό κλασμάτων;

Διαδικασίες χωρίς συνδέσεις

Να υπολογίσεις:

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$$
$$\frac{5}{6} \times \frac{7}{8}$$
$$\frac{4}{9} \times \frac{3}{5}$$

Διαδικασίες με συνδέσεις

Να βρεις το $\frac{1}{2}$ του $\frac{1}{6}$. Να χρησιμοποιήσεις σχήματα μοτίβου, να σχεδιάσεις και να επεξηγήσεις την απάντησή σου.

Κάνω μαθηματικά

Να κατασκευάσεις ένα δικό σου πρόβλημα που να αντιστοιχεί στην πιο κάτω μαθηματική πρόταση. Να επιλύσεις το πρόβλημα και να επεξηγήσεις την απάντησή σου.

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$$

Ανάπτυξη συλλογισμού σε όλες τις τάξεις

Η χρήση έργων υψηλής γνωστικής δυσκολίας είναι δυνατή από τις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου:

Σε έναν χώρο στάθμευσης υπάρχουν 10 αυτοκίνητα μπλε κόκκινα. Να βρείτε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς.



Να χρωματίσεις με το ίδιο χρώμα τις κάλτσες που έχουν άθροισμα 10.



Συζήτηση

- Να εισηγηθείτε έργα που να εντάσσονται στα 4 επίπεδα γνωστικής δυσκολίας για τη διδασκαλία του Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη στην Στ' δημοτικού.

Διαχείριση έργων υψηλής γνωστικής δυσκολίας

Μια εταιρεία κινητής τηλεφωνίας προσφέρει τα πιο κάτω σχέδια:

- A. Σταθερή χρέωση €30 τον μήνα και 10 σεντ το κάθε μήνυμα.
- B. Σταθερή χρέωση €50 τον μήνα και 5 σεντ το κάθε μήνυμα.

Σε ποια περίπτωση είναι πιο συμφέρουσα επιλογή το σχέδιο B; Να εξηγήσεις

Οι μαθητές δυσκολεύονται να ανταποκριθούν στο πρόβλημα. Με ποιο τρόπο μπορεί να βοηθήσει ο εκπαιδευτικός, χωρίς να τροποποιήσει τον βαθμό δυσκολίας του προβλήματος;

A

Για να ξεκινήσουν να εργάζονται οι μαθητές γράφει στον πίνακα τη σχέση:
Συνολικό κόστος= Αρχική χρέωση +
Αριθμός μηνυμάτων × Κόστος μηνύματος

Στη συνέχεια ζητά από τους μαθητές να γράψουν την αντίστοιχη σχέση για κάθε σχέδιο και να δημιουργήσουν αντίστοιχο πίνακα τιμών.

Για να μην χαθούν στις πράξεις, παροτρύνει τους μαθητές να ξεκινήσουν να συμπληρώνουν τον πίνακα για μηδέν μηνύματα και στη συνέχεια να αυξάνουν τον αριθμό των μηνυμάτων κατά 10.

B

Καθώς οι μαθητές εργάζονται υποβάλλει στους μαθητές ερωτήσεις κατανόησης του προβλήματος.

Ζητά από τους μαθητές να υπολογίσουν το κόστος κάθε σχεδίου για την αποστολή 1 μηνύματος.

Στη συνέχεια ζητά να υπολογίσουν το κόστος κάθε σχεδίου για 10 μηνύματα και να προβληματιστούν κατά πόσο το κόστος θα είναι πάντα ψηλότερο για ένα από τα δύο σχέδια. Στη συνέχεια τους αφήνει να εργαστούν μόνοι τους.

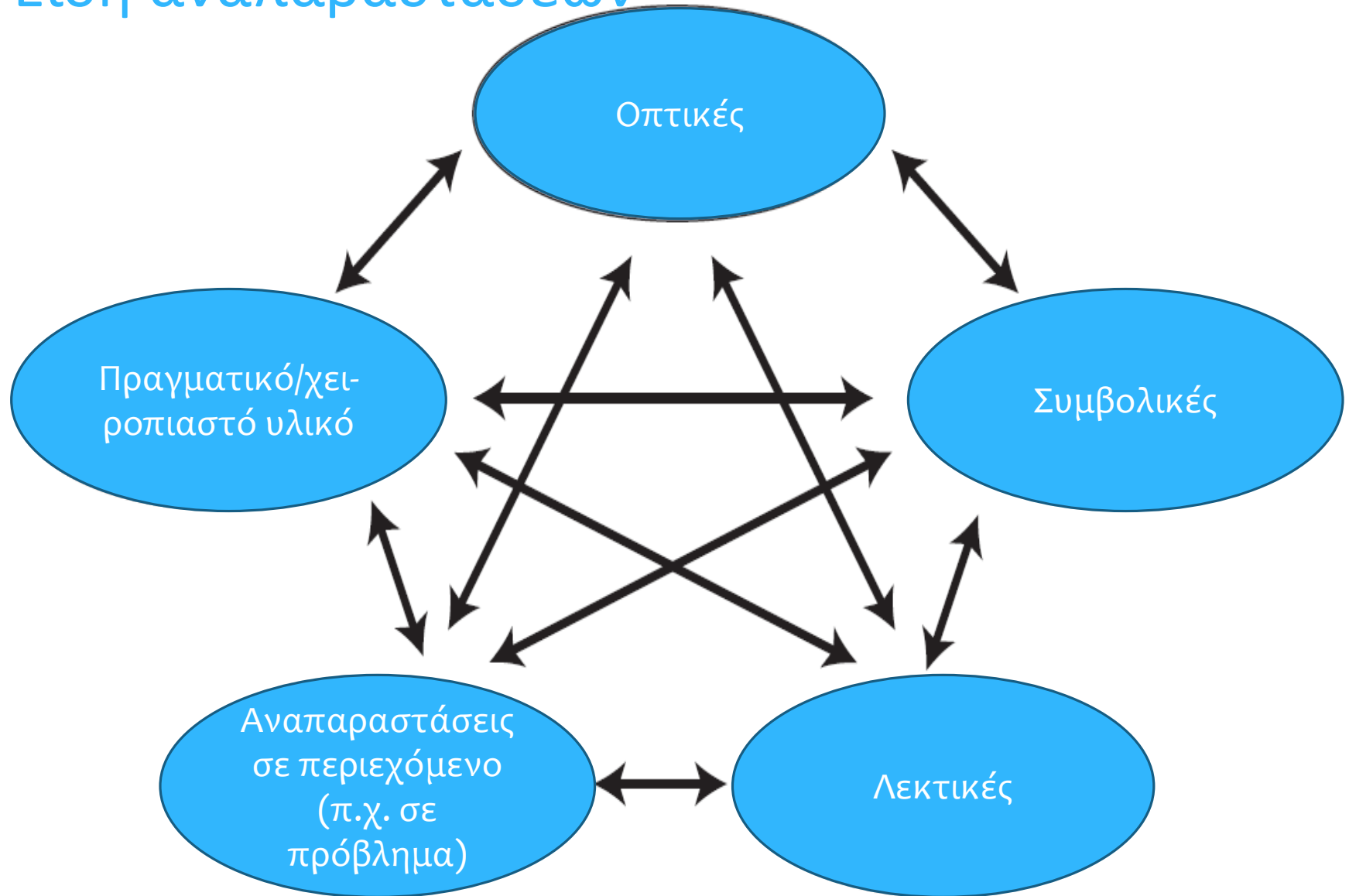
Καθώς οι μαθητές εργάζονται παρατηρεί διαφορετικές προσεγγίσεις και παίρνει σημειώσεις ώστε να οργανώσει τη συζήτηση στην τάξη που θα ακολουθήσει.

Χρήση και διασύνδεση μαθηματικών αναπαραστάσεων

Χρήση και διασύνδεση μαθηματικών αναπαραστάσεων

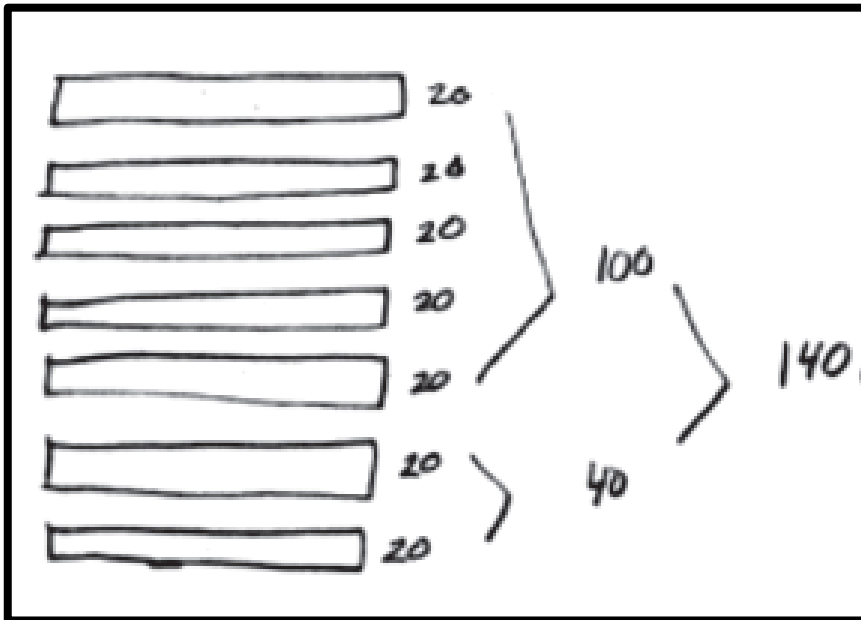
- Όταν οι μαθητές μαθαίνουν να αναπαριστούν, να συζητούν και να κάνουν συνδέσεις μεταξύ μαθηματικών ιδεών σε πολλαπλές μορφές, επιδεικνύουν βαθύτερο επίπεδο εννοιολογικής κατανόησης (Fuson, Kalchman, & Bransford, 2005).
- Το βάθος της εννοιολογικής κατανόησης εξαρτάται από τη δύναμη και τον βαθμό πολυπλοκότητας των συνδέσεων των διαφορετικών αναπαραστάσεων μιας μαθηματικής έννοιας.

Είδη αναπαραστάσεων



Συζήτηση

- * Η τρίτη τάξη ενός σχολείου είναι υπεύθυνη για τη διαμόρφωση του χώρου για μια συναυλία στο σχολείο. Θα πρέπει να τοποθετήσουν 7 σειρές από 20 καρέκλες η καθεμία, αφήνοντας χώρο για έναν κεντρικό διάδρομο.



$$\underline{20} + \underline{20} + \underline{20} + \underline{20} + \underline{20} + \underline{20} + \underline{20}$$

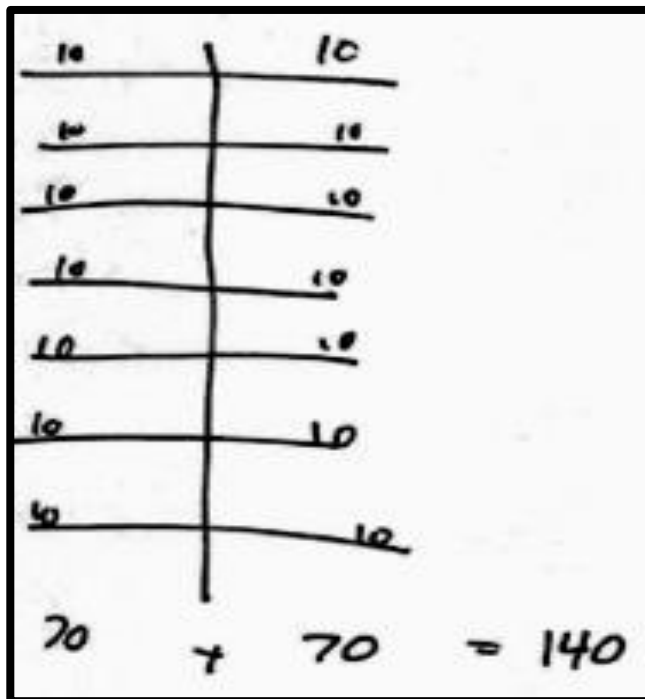
$$40 + 40 = 80$$

$$80 + 20 = 100$$

$$100 + 20 = 120$$

$$120 + 20 = 140$$

140 chairs



- * Πώς συνδέονται οι 3 τρόποι εργασίας;
- * Σε ποια περίπτωση είναι πιο εύκολο να υπολογιστεί ο συνολικός αριθμός των καθισμάτων;
- * Ποιες ομοιότητες και ποιες διαφορές έχουν;
- * Πώς συνδέεται ο κάθε τρόπος με τον πολλαπλασιασμό;
- * Ποιες μαθηματικές προτάσεις πολλαπλασιασμού αντιστοιχούν σε κάθε περίπτωση;

Συζήτηση

- * Να εισηγηθείτε αναπαραστάσεις που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την έννοια του κλάσματος στην Γ' δημοτικού.
- * Πώς συνδέονται μεταξύ τους;

Παραγωγικές Συζητήσεις

Παραγωγικές Συζητήσεις

- Μια αποτελεσματική διδασκαλία στα μαθηματικά εμπλέκει τους μαθητές σε οργανωμένες παραγωγικές συζητήσεις.
- Οι μαθητές ανταλλάζουν ιδέες, επιλύουν απορίες, κατασκευάζουν επιχειρήματα, επεξηγούν τον τρόπο εργασίας τους και.

Μοντέλο Παραγωγικής Συζήτησης

0. Καθορισμός στόχων και επιλογή κατάλληλων προβλημάτων
1. Προσδοκίες (Anticipating) – Εικασίες για τις απαντήσεις των μαθητών
2. Παρακολούθηση / Έλεγχος (Monitoring) των απαντήσεων των μαθητών
3. Επιλογή (Selecting) απαντήσεων
4. Σειροθέτηση (Sequencing) των απαντήσεων των μαθητών κατά τη συζήτηση
5. Σύνδεση (Connecting) των απαντήσεων κατά τη συζήτηση

Γιατί αυτές οι 5 (+) διαδικασίες βοηθούν τους εκπαιδευτικούς;

- **Δίνουν στους εκπαιδευτικούς περισσότερο έλεγχο στη μάθηση μέσω:**
 - Της συζήτησης του περιεχομένου.
 - Της εξέλιξης της διδασκαλίας και δεν βασίζεται στον αυτοσχεδιασμό.
- **Δίνει στους εκπαιδευτικούς περισσότερο χρόνο, για να:**
 - Κατανοήσουν τη σκέψη των μαθητών.
 - Σχεδιάσουν τις ερωτήσεις που θα υποβάλουν, καθώς και να αναπτύξουν άλλες διδακτικές ενέργειες.
- **Δίνουν μια αξιόπιστη διαδικασία στους εκπαιδευτικούς για να βελτιώσουν σταδιακά τα μαθήματά τους.**
- **«Σέβονται» τη σκέψη των μαθητών, ενώ την καθοδηγούν χρησιμοποιώντας παραγωγικές και ξεκάθαρες κατευθύνσεις.**

Στοχευμένες Ερωτήσεις

Υποβολή στοχευμένων ερωτήσεων

- ✓ Αποτελεσματική διδασκαλία στα μαθηματικά προϋποθέτει την υποβολή στοχευμένων ερωτήσεων που επιτρέπουν στον εκπαιδευτικό να κατανοήσει τι γνωρίζουν οι μαθητές και συνεπώς να υποβάλει στη συνέχεια ερωτήματα που να ανταποκρίνονται στα διαφορετικά γνωστικά επίπεδα των μαθητών.

Τύπος Ερώτησης	Περιγραφή	Παράδειγμα
Συλλογή πληροφοριών	Οι μαθητές ανακαλούν γνώση, ορισμούς και διαδικασίες.	Τι ονομάζουμε ομώνυμα κλάσματα; Ποιος είναι ο τύπος του υπολογισμού του εμβαδού τριγώνου;
Προκαλούν σκέψη	Οι μαθητές επεξηγούν, αποσαφηνίζουν τη σκέψη τους, επεξηγώντας τα βήματα που ακολούθησαν για να ολοκληρώσουν μια διαδικασία ή για να επιλύσουν ένα πρόβλημα.	Μπορείς να επεξηγήσεις με ποιο τρόπο χρησιμοποίησες τον πίνακα τιμών, για να βρεις την καλύτερη προσφορά; Δεν είναι ξεκάθαρο πώς βρήκες τα ζευγαράκια κόκκινων και κίτρινων αυτοκινήτων που δίνουν άθροισμα 10. Μπορείς να εξηγήσεις πώς βρήκες όλους τους συνδυασμούς;

Τύπος Ερώτησης	Περιγραφή	Παράδειγμα
Αναδεικνύουν μαθηματικές ιδέες	Οι μαθητές συζητούν μαθηματικές δομές και κάνουν συνδέσεις μεταξύ μαθηματικών ιδεών και σχέσεων	Πώς συσχετίζεται η σχέση που έγραψες με τα δεδομένα του κάθε σχεδίου τηλεφωνίας; Με ποιο τρόπο ο σχεδιασμός των σειρών των καθισμάτων συνδέεται με τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση;
Ενθαρρύνουν τον αναστοχασμό και την αιτιολόγηση	Οι μαθητές επιδεικνύουν βαθύτερη κατανόηση του συλλογισμού και των ενεργειών τους, διατυπώνοντας επιχειρήματα για την ορθότητα της εργασίας τους.	Γιατί το Σχέδιο Α είναι πιο συμφέρουσα προσφορά για μικρό αριθμό μηνυμάτων και στη συνέχεια γίνεται λιγότερο συμφέρουσα προσφορά; Πώς θα μπορούσες να βρεις όλους τους συνδυασμούς αυτοκινήτων, κάνοντας τους λιγότερους υπολογισμούς;

Γ

Β

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{10}$$

- Γιατί πρόσθεσες αριθμητική με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή;
- **Αφού είναι πρόσθεση.**
- Τα κλάσματα δεν είναι ομώνυμα;
- **Ναι.**
- Τι μάθαμε για την πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων; Παίζει ρόλο ο παρονομαστής;
- **Τι εννοείς; Είναι ο ίδιος ο παρονομαστής.**
- Συνεπώς, δεν μπορούμε απλά να προσθέσουμε τους αριθμητές και ο παρονομαστής να παραμείνει ο ίδιος;

- Γιατί πρόσθεσες αριθμητική με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή;
- **Αφού είναι πρόσθεση.**
- Μπορείς να εξηγήσεις τι δείχνει το κάθε κλάσμα;
- **Στο πρώτο κλάσμα μοιράζουμε μια σοκολάτα στα πέντε και παίρνουμε το ένα, ενώ στο δεύτερο κλάσμα πάλι μοιράζουμε στα 5 και παίρνουμε τα 2.**
- Τώρα που θα προσθέσεις τα δύο κλάσματα, θα αλλάξει ο τρόπος που είναι χωρισμένες οι σοκολάτες;
- **Όχι.**
- Πώς θα μπορούσες να εξηγήσεις την πρόσθεση των δύο κλασμάτων, χρησιμοποιώντας το παράδειγμα σου με τις σοκολάτες;

Ανάπτυξη διαδικαστικής επάρκειας μέσω της εννοιολογικής κατανόησης

Ανάπτυξη διαδικαστικής επάρκειας μέσω της εννοιολογικής κατανόησης

Όταν η απόκτηση διαδικασιών συνδέεται με την κατανόηση των εμπλεκόμενων εννοιών, τότε οι μαθητές μπορούν να ανακαλούν πιο εύκολα τις διαδικασίες, να τις αιτιολογούν, να τις τροποποιούν και να τις εφαρμόζουν σε νέες καταστάσεις.

Διαδικαστική επάρκεια

- * Δεξιότητα στην εκτέλεση πράξεων ή διαδικασιών
- * Η εννοιολογική κατανόηση συμβάλλει στην εύκολη απόκτηση των διαδικαστικών δεξιοτήτων, συμβάλλει στη μείωση των λαθών
- * Διαδικαστική επάρκεια σημαίνει ο μαθητής να έχει την ικανότητα να επιλέγει μεταξύ διαφορετικών διαδικασιών, να αιτιολογεί την επιλογή του και να εκτελεί υπολογισμούς με ακρίβεια.

Δημήτρης

$$\begin{array}{r} 2 \\ 57 \\ x 4 \\ \hline 288 \end{array}$$

Πολλαπλασίασα το 7 επί 4 και βρήκα 28. Έγραψα κάτω το 8 και μετέφερα το 2. Στη συνέχεια, πρόσθεσα το 2 με το 5 και βρήκα 7 και το πολλαπλασίασα επί 4 και βρήκα 28. Έγραψα κάτω το 28 και βρήκα 288.

Άννα

$$\begin{array}{l} 4 \times 57 \\ 4 \times 50 = 200 \\ 4 \times 7 = 28 \\ 200 + 28 = 228 \end{array}$$

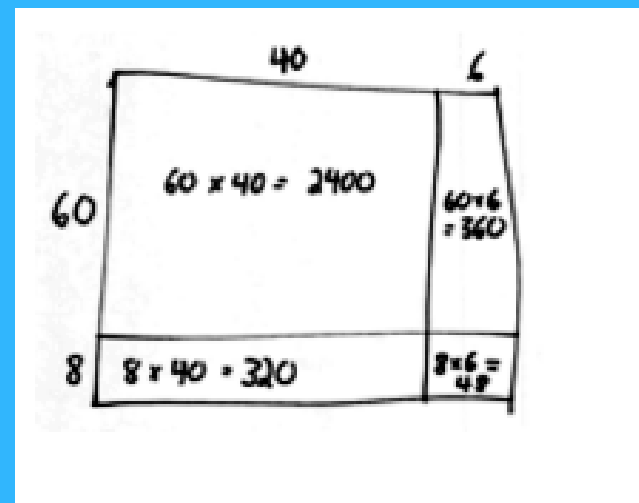
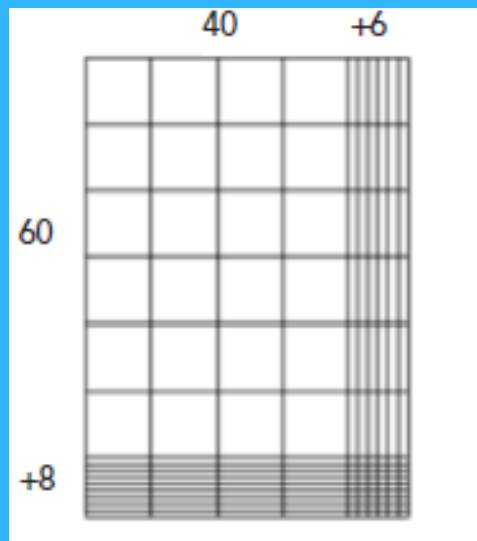
Το έσπασα. Πρώτα πολλαπλασίασα 4 επί 50 και βρήκα 200. Μετά πολλαπλασίασα 4 επί 7 και βρήκα 28. Πρόσθετα τα δύο και βρήκα την απάντηση.

$$\begin{array}{r} 2 \\ + 57 \\ \times 4 \\ \hline 288 \end{array}$$

A handwritten multiplication problem on a white background. The number 57 is written above the number 4. A horizontal line is drawn below the 4. The result 288 is written below the line. A small '2' with a '+' sign is written above the 5, indicating a carry from the previous step.

$$\begin{array}{r} \text{+}2 \\ 57 \\ \times 4 \\ \hline 288 \end{array}$$

- Αξιοποίηση εκτίμησης: $60 \times 4 = 240$
- Επιμεριστική ιδιότητα
- Αξία θέση ψηφίου
- Διασύνδεση με άλλους αλγόριθμους
- Λεκτική επεξήγηση κάθε βήματος
- Χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων



$$\begin{array}{rcl}
 46 & = & 40 + 6 \\
 \times 68 & = & 60 + 8 \\
 \hline
 2400 & = & 60 \times 40 \\
 360 & = & 60 \times 6 \\
 320 & = & 8 \times 40 \\
 48 & = & 8 \times 6 \\
 \hline
 3128
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 46 \\
 \times 68 \\
 \hline
 368 \\
 2760 \\
 \hline
 3128
 \end{array}$$

Ενίσχυση και στήριξη μαθητών κατά τη μαθησιακή διαδικασία

Ενίσχυση και στήριξη μαθητών κατά τη μαθησιακή διαδικασία

- * Οι εκπαιδευτικοί πολλές φορές θεωρούν ότι οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές ή πιθανά τους λάθη να οφείλονται σε αποτυχία της διδασκαλίας τους με αποτέλεσμα να προβαίνουν σε διορθωτικές κινήσεις, για να «διασώσουν» το μάθημα, με αποτέλεσμα να παρέχουν υπερβολική καθοδήγηση και στη συνέχεια να παρέχουν οι ίδιοι τις απαντήσεις στους μαθητές.
- * Η πρακτική αυτή περιορίζει την προσπάθεια των μαθητών, υποβαθμίζει τη γνωστική δυσκολία του μαθήματος και στερεί από τους μαθητές τη δυνατότητα να εργαστούν σε αυθεντικές μαθηματικές καταστάσεις.

Εκ των προτέρων σχεδιασμός

Κατά το σχεδιασμό του μαθήματος ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να προνοήσει ενέργειες που θα βοηθούσαν τους μαθητές σε περίπτωση δυσκολιών ή παρερμηνειών, ώστε να αποτρέψει βιαστικές αποφάσεις από μέρους του κατά τη διάρκεια του μαθήματος που θα έχουν το ακριβώς αντίθετο αποτέλεσμα.

Ενέργειες εκπαιδευτικού

- * Χρήση δραστηριοτήτων που προάγουν το συλλογισμό και την επίλυση προβλήματος, ενθάρρυνση των μαθητών να επιμένουν κατά την επίλυση προβλήματος, παροχή στοχευμένης ανατροφοδότησης που ενισχύει τους μαθητές, αλλά δεν μεταβάλλει τον βαθμό δυσκολίας.
- * Ζητά από τους μαθητές να επεξηγήσουν τον τρόπο σκέψης τους, ώστε να ανιχνεύσει δυσκολίες.
- * Δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να συζητήσουν και να αιτιολογήσουν την ορθότητα των απαντήσεών τους.
- * Παροχή στους μαθητές κατάλληλων εργαλείων.
- * Διατύπωση ερωτημάτων με βάση τον τρόπο εργασίας των μαθητών και όχι με βάση τις προσεγγίσεις και τις αντιλήψεις του εκπαιδευτικού.

Συζήτηση

* Δύο εκπαιδευτικοί έδωσαν στους μαθητές τους (Ε' δημοτικού) το πιο κάτω πρόβλημα:

«Η Ιωάννα πήγε σε ένα εμπορικό κέντρο, για να ξοδέψει τα λεφτά που είχε πάρει στα γενέθλιά της. Όταν, επέστρεψε σπίτι, είχε €24. Ξόδεψε στο εμπορικό κέντρο τα $\frac{3}{5}$ των λεφτών που είχε. Πόσα λεφτά πήρε στα γενέθλιά της;»

Οι μαθητές και στις δύο τάξεις αντιμετώπισαν δυσκολίες, και υποστήριξαν ότι δεν κατάλαβαν το πρόβλημα και δεν ήξεραν πώς να ξεκινήσουν.

Να εισηγηθείτε μια κατάλληλη προσέγγιση αντιμετώπισης της αντίδρασης των μαθητών.

Εκπαιδευτικός Α

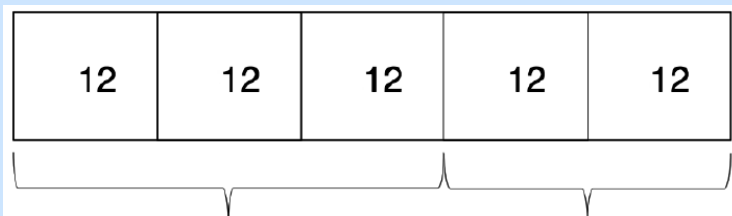
Στάδια Ανατροφοδότησης:

(α) Να σχεδιάσετε ένα διάγραμμα, για να σας βοηθήσει.

(β) Να σχεδιάσετε ένα ορθογώνιο, να το μοιράσετε στα πέντε.

(γ) Τα δυο μέρη του σχήματος αντιστοιχούν στα 24 ευρώ. Να γράψετε πόσα ευρώ αντιστοιχούν σε κάθε μέρος.

(δ) Με βάση το σχήμα να βρείτε την απάντηση.



Εκπαιδευτικός Β

Στάδια Ανατροφοδότησης:

(α) Να γράψετε δύο πράγματα που ξέρετε για το πρόβλημα και ένα πράγμα το οποίο δεν ξέρετε, αλλά θα σας βοηθούσε στην επίλυση του.

(β) Διεξαγωγή συζήτησης στην οποία οι μαθητές προτείνουν τρόπους επίλυσης.

(γ) Ενθάρρυνση των μαθητών να αξιοποιήσουν τις ιδέες που αναφέρθηκαν κατά τη συζήτηση (π.χ. δοκιμή και έλεγχος, χρήση αριθμητικής γραμμής, διαγράμματος)

(δ) Συζήτηση τρόπων αξιοποίησης του πιο κάτω διαγράμματος

--	--	--	--	--

Συνεχής διαμορφωτική αξιολόγηση

Συνεχής διαμορφωτική αξιολόγηση

Η αποτελεσματική διδασκαλία στα μαθηματικά προϋποθέτει συστηματική διαμορφωτική αξιολόγηση με βάση την εργασία και τα επιτεύγματα των μαθητών για σκοπούς βελτίωσης της διδασκαλίας.

- * Ανίχνευση λαθών, δυσκολιών, παρερμηνειών
- * Ερμηνεία λαθών ως προς το συλλογισμό των μαθητών
- * Κατάστρωση σχεδίου παροχής ανατροφοδότησης σύμφωνα με τον βαθμό κατανόησης των μαθητών

$$8 + 4 = \underline{12} + 7$$

$$\textcircled{0}\textcircled{0}\textcircled{0}\textcircled{0}\textcircled{0}\textcircled{0} + \textcircled{0}\textcircled{0}\textcircled{0}\textcircled{0}\textcircled{0}$$

$$8 + 4 = \underline{5} + 7$$

$$\begin{array}{c} \textcircled{0}\textcircled{0}\textcircled{0}\textcircled{0}\textcircled{0}\textcircled{0} \\ + \\ \textcircled{0}\textcircled{0}\textcircled{0}\textcircled{0}\textcircled{0}\textcircled{0} \\ \hline \textcircled{0}\textcircled{0}\textcircled{0}\textcircled{0}\textcircled{0}\textcircled{0} \end{array}$$

Άλλες απαντήσεις που δόθηκαν: 19, 11, 6

- * Να ερμηνεύσετε κάθε απάντηση ως προς τον συλλογισμό του μαθητή.
- * Τι είδους ανατροφοδότηση θα δίνετε;

Ενέργειες Εκπαιδευτικού

- * Τι θεωρείται ως τεκμήριο της προόδου του μαθητή για τον συγκεκριμένο μαθηματικό στόχο;
- * Συλλογή δεδομένων από την εργασία του μαθητή σε κομβικά σημεία κατά τη διάρκεια του μαθήματος.
- * Ερμηνεία εργασίας μαθητή, ώστε να κατανοηθεί ο βαθμός κατανόησής του και ο συλλογισμός του.
- * Λήψη απόφασης τη συγκεκριμένη στιγμή ώστε να δοθεί ανατροφοδότηση στις ερωτήσεις/απορίες του μαθητή και για να ενθαρρυνθεί ο μαθητής να προβληματιστεί περισσότερο και να εμβαθύνει τη σκέψη του
- * Αναστοχασμός με βάση την εργασία του μαθητή για αναδιαμόρφωση και βελτίωση των επόμενων μαθημάτων

Εργασία-Συζήτηση: Παρακολούθηση διδασκαλίας

Να παρακολουθήσετε το απόσπασμα από τη διδασκαλία ενός αναπτυσσόμενου μοτίβου στην Ε΄ τάξη και να παρατηρήσετε τα ακόλουθα:

- * Τρόπος εργασίας μαθητών
- * Ερωτήσεις εκπαιδευτικού
- * Ποιότητα συζήτησης στην ολομέλεια
- * Αναπαραστάσεις
- * Τρόποι στήριξης μαθητών